Median(मध्यका)

के प्राप्तांक

2. मध्यांक/मध्यका
(The Median)

मध्यका आरोही अथवा अवरोही क्रम में दी हुई समंक माला के विभिन्न पदों के मध्य पद (Middle item) का मूल्य होती है और समंकमाला को दो बराबर भागों में इस प्रकार बांटती है कि उसके एक ओर के सब पद उससे कम मूल्य के तथा दूसरी ओर के सब पद उससे अधिक मूल्य के होते हैं।

कॉनर के अनुसार –"मध्यका समंक श्रेणी का वह चल मूल्य है जो समूह को दो बराबर भागों में इस प्रकार बांटता है कि एक भाग में सारे मूल्य मध्यका से अधिक और दूसरे भाग में सारे मूल्य उससे कम होते हैं।"

उदाहरण के लिये, 5 विद्यार्थियों ने 50 में से अर्थशास्त्र में क्रमश: 17, 25, 30, 35 और 45 अंक प्राप्त किये तो मध्यका मूल्य 30 होगा क्योंकि वह तीसरे पद का मूल्य है जो बिल्कुल मध्य में स्थित है और पहले तथा दूसरे विद्यार्थी के अंक इससे कम तथा चौथे और पाँचवे विद्यार्थी के अंक इससे अधिक हैं।

मध्यका निकालते समय ध्यान देने योग्य नियम–मध्यका निकालने के लिये सर्वप्रथम समंकमाला को आरोही या अवरोही क्रम (arrangement) में रखना आवश्यक है। पद किसी मापनीय गुण के आधार पर आरोही (assending) या अवरोही (descending) क्रमानुसार अनुविन्यासित किये जाते हैं। इस प्रकार अनुविन्यासित श्रेणी में उस पद का माप मध्यका कहलता है जो समंकमाला को दो बराबर भागों में विभाजित करता है।

मध्यका का निर्धारण (Determination of Median)

(अ) व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका (Median in individual Series) - व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका निकालते समय निम्न बातों का ध्यान रखा जाता है -

(i) सबसे पहले पदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखा जाता है।

(ii) तत्पश्चात निम्न सूत्र द्वारा मध्यका मूल्य ज्ञात किया जाता है -

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ th item}, \quad M = \text{मध्यका पद (Median Size)}$$

N = पदों की संख्या (Number of items)

उदाहरण 13—निम्न अव्यवस्थित समंकों का मध्यका मूल्य (M) ज्ञात कीजिए-

Locate the Median (M) in the following values.

4	7	9	11	30	25	17	20	15

हल–सर्वप्रथम इन मूल्यों को आरोही क्रम में अनुविन्यासित (Arrangement) किया जायेगा –

क्रम सं. (S.No.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
पद संख्या (Value)	4	7	9	1	15	17	20	25	30

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item} = \text{Size of } \left(\frac{9+1}{2}\right) \text{th item}$$

$M = 5$th item

अब ऊपर दिये गये पदों में 5वें स्थान पर रखा हुआ पद मूल्य (15) ही मध्यका मूल्य होगा।

$$M = 15$$

सम (Even) पद संख्या वाली श्रेणी में मध्यका निकालना (Location of Median in a Series with Even Number of Items) — जब पदों की संख्या 'सम' (Even) होती है अर्थात 2 से विभाज्य होती है तब सम संख्या में 1 जोड़कर और फिर 2 का भाग देने पर भजनफल अर्थात (मध्यका आकार) पूर्णांक नहीं आता बल्कि भिन्न (Fraction) में आता है। ऐसी स्थिति में मध्यका का निर्धारण दोनों केन्द्रीय मूल्यों का समान्तर माध्य निकालकर अर्थात दोनों को जोड़कर तथा उसे 2 से भाग देकर प्राप्त कर लिया जाता है।

उदाहरण 14—एक कक्षा में 8 छात्रों के सांख्यिकी टैस्ट में प्राप्तांक (व्यवस्थित) नीचे दिये गये हैं। मध्यका प्राप्तांक (M) ज्ञात कीजिए–

The following table shows the marks obtained by 8 students of a class in statistics test. Locate Median (Md)

क्रम सं. (S.No.)	1	2	3	4	5	6	7	8
पद संख्या (Values)	7	14	18	25	28	33	36	42

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{th item} = \left(\frac{8+1}{2}\right) \text{th item} = 4.5\text{th item}$$

$$\text{Size of 4.5th item} = \frac{\text{Value of 4th item} + \text{Value of 5th item}}{2}$$

$$\frac{25+28}{2} = \frac{53}{2} = 26.5$$

$M = 26.5$

खण्डित या विच्छिन्न श्रेणी मे मध्यका (Median in Discrete Series) — खण्डित श्रेणी में समंकों को अनुविन्यासित करने की आवश्यकता नहीं होती क्योंकि यह पहले ही क्रमबद्ध होता है। अन्यथा होने पर पर इसे क्रमबद्ध कर लेना चाहिए।

गणना विधि –

(1) पदों की संचयी आवृत्ति (c.f.) ज्ञात करते हैं। इस प्रकार श्रेणी 'संचय आवृत्ति श्रेणी' में बदल जाती है।

(2) फिर निम्न सूत्र द्वारा मध्यका की क्रम-संख्या ज्ञात कर ली जाती है –

$$Md = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ th item}$$

यहाँ N = आवृत्तियों का योग है।

(3) यह देखते हैं कि मध्यका संख्या (M. No.) किस संचयी आवृत्ति (c.f.) में आता है।

(4) मध्यका संख्या जिस संचयी आवृत्ति (c.f.) में आती है उसके सामने वाला पद ही मध्यका (Median) होता है।

उदाहरण 15—निम्न सारणी में मध्यका (M) ज्ञात कीजिए –

Determine Median in the following Series.

क्रम सं. (x)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आवृत्ति (f)	3	5	7	11	14	16	20	23	10	6

हल–

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ th item}$$

$$M = \text{Size of } \left(\frac{115+1}{2}\right) \text{th item}$$

$$\text{Median (M)} = 7$$

अखण्डित या सतत या अविच्छिन्न में मध्यका (Median in Continuous Series)

गणना विधि—(i) सर्वप्रथम संचयी आवृत्ति (c.f.) ज्ञात की जाती है।

(ii) इसके बाद मध्यका संख्या अर्थात केन्द्रीय पद ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है –

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right) \text{th item}$$

महत्वपूर्ण नोट - मध्यका संख्या निकालने की दृष्टि से खण्डित तथा अखण्डित श्रेणी में थोड़ा सा अन्तर होता है। खण्डित श्रेणी मे मध्यका $\frac{N+1}{2}$ वें पद पर मूल्य होता है, जबकि अखण्डित श्रेणी में $\frac{N}{2}$ वें पद का मूल्य मध्यका होता है।

(iii) तत्पश्चात मध्यका संख्या जिस संचयी आवृत्ति में सबसे पहली बार शामिल होती

है उसे सम्बंधित वर्ग, मध्यका वर्गान्तर कहलाता है।

(iv) 'मध्यका वर्गान्तर' में से मध्यका का मूल्य ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है –

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

जहां M = मध्यांक (Median)

l_1 = मध्यका वर्ग की निचली सीमा (Lower limit of Median class)

i = वर्गान्तर का आकार

m = मध्यका संख्या

c = मध्यका वर्गान्तर से ठीक पहले वाले वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = मध्यान्तर वर्ग की आवृत्ति

उदाहरण 16 — निम्नलिखित श्रेणी में मध्यका (M) ज्ञात कीजिए –

मज़दूरी (रु॰)	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
श्रमिकों की संख्या	25	35	65	45	30

हल– मध्यका की गणना –

मज़दूरी	श्रमिकों की संख्या	संचयी आवृत्ति
20 - 30	25	25
30 - 40	35	60 c
40 - 50	65 f	125
50 - 60	45	170
60 - 70	30	200

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right) \text{th item} = \frac{200}{2} \text{th item} = 100\text{th item}$$

$$M \text{ No. } (m) = \frac{N}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

100 संख्या संचयी आवृत्ति 125 में निहित है अत: उसके ठीक सामने वाला वर्ग 40-50 मध्यका वर्ग होगा–

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

यहां $l_1 = 40,\ i = 10,\ f = 65,\ m = 100,\ c = 60$

$$M = 40 + \frac{10}{65}(100 - 60)$$

$= 40 + \frac{10}{65} \times 40 = 40 + \frac{400}{65}$

$= 40 + 6.15 = 46.15$

मध्यका मज़दूरी = 46.15 रूपये।

मध्यका सम्बंधी कुछ महत्वपूर्ण बातें Md = 46.15

(Some Specific Issues in Median)

(1) **संचयी आवृत्ति दिये रहने पर मध्यका निकालना** – यदि समंक माला संचयी आवृत्ति वितरण के आधार पर दी गयी है तो मध्यका, बहुलक या मध्यक (समान्तर माध्य) निकालने से पूर्व उसे 'सामान्य वितरण' में बदल लेना चाहिए –

उदाहरण 17— निम्नलिखित श्रेणी में मध्यका (M) ज्ञात कीजिए –

प्राप्तांक (से कम)	80	70	60	50	40	30	20	10
विद्यार्थियों की संख्या	240	190	125	95	75	60	40	25

हल – श्रेणी को पहले आरोही एवं साधारण आवृत्ति वितरण में परिवर्तित करेंगे–

प्राप्तांक (Marks)	विद्यार्थियों की संख्या (No. of students)	संचयी आवृत्ति (C.f.)
0 - 10	25	25
10 - 20	15 = (40 – 25)	40
20 - 30	20 = (60 – 40)	60
30 - 40	15 = (75 – 60)	75
40 - 50	20 = (95 – 75)	95
50 - 60	30 = (125 – 95)	125
60 - 70	65 = (190 – 125)	190
70 - 80	50 = (240 – 190)	240
	N = 240	

$M = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right) \text{ th item} = \text{Size of } \left(\frac{240}{2}\right)$

$= 120\text{th item.}$

$m = \frac{N}{2} = \frac{240}{2} = 120$, यह संचयी आवृत्ति 125 में आ रहा है। अतः मध्यका वर्ग 50 - 60 है।

सूत्र का प्रयोग करने पर –

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

$$= 50 + \frac{10}{30}(120 - 95)$$

$$= 50 + \frac{10}{30} \times 25 = 50 + \frac{250}{30} = 50 + 8.33, \quad M = 58.33$$

(2) **जब प्रथम वर्ग ही मध्यका वर्गान्तर हो (When first class interval beocmes median class)** — जब प्रथम वर्ग की मध्यका वर्गान्तर हो तब ऐसी स्थिति में 'c' का मूल्य शून्य माना जाता है और बाकी क्रिया पूर्ववत रहती हैं।

(3) **अवरोही वर्गान्तर दिये जाने पर मध्यका निकालना**—जब वर्गान्तर आरोही क्रम (ascending) के बजाये अवरोही क्रम (descending) में दिये हों तब ऐसी स्थिति में मध्यका निकालने के दो तरीके हैं। **प्रथम** – वर्गान्तरों के अवरोही क्रम को आरोही क्रम में बदल लें तथा सामान्य सूत्र का प्रयोग करें तथा $M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$

उदाहरण 18—अर्थशास्त्र की परीक्षा में प्राप्तांक आवृत्ति वितरण से मध्यका (M) ज्ञात कीजिए –

Calculate Median from the following table relating to marks obtained in Economics in an examination.

प्राप्तांक (Marks)	30-35	25-30	20-25	15-20	10-15	5-10	0-5
विद्यार्थियों की संख्या (No. of students)	4	8	12	16	10	6	4

हल—बताये गये सूत्र का प्रयोग करने के लिए इस प्रश्न में हमें अवरोही क्रम को आरोही क्रम में निम्न प्रकार परिवर्तित कर लेना चाहिए –

प्रप्तांक (Marks)	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
0 - 5	4	4
5 - 10	6	10
10 - 15	10	20
15 - 20	16 f	36
20 - 25	12	48
25 - 30	8	56
30 - 35	4	60
	N = 60	

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right)\text{th item} = \text{Size of } \left(\frac{60}{2}\right)\text{th item}$$

$$= 30\text{th item}$$

यह संचयी आवृत्ति 36 में आ रहा है। अत: उसके सामने वाला वर्ग 15 - 20 मध्यका वर्ग है –

सूत्र का प्रयोग करने पर -

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c)$$

यहां $l_1 = 15$, $i = 5$, $f = 16$, $c = 20$, $m = 30$

$$M = 15 + \frac{5}{16}(30 - 20)$$

$$= 15 + \frac{5}{16} \times 10 = 15 + \frac{50}{16} = 15 + 3.125 \qquad \mathbf{M = 18.125}$$

उदाहरण 19—मध्यका मूल्य (M) ज्ञात कीजिए।

आय (Income) (रू.)	40-44	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74
व्यक्तियों की संख्या	2	7	10	12	8	5	3

हल– सबसे पहले समावेशी (Inclusive) श्रेणी को अपवर्जी (Exclusive) श्रेणी में परिवर्तित करेंगे और फिर गणना करके मध्यका निकालेंगे–

आय (रू.में)	व्यक्तियों की संख्या f	संचयी आवृत्ति (c. f.)
39.5 - 44.5	2	2
44.5 - 49.5	7	9
49.5 - 54.5	10	19
54.5 - 59.5	12	31
59.5 - 64.5	8	39
64.5 - 69.5	5	44
69.5 - 74.5	3	47
	N = 47	

$$M = \text{Size of } \left(\frac{N}{2}\right) \text{th item} = \text{Size of } \left(\frac{47}{2}\right) \text{th item}$$

$$M \text{ No.} = \frac{N}{2} = \frac{47}{2} = 23.5$$

यह संचयी आवृत्ति 31 में आता है जिसके सामने वाला वर्ग 54.5 - 59.5 मध्यका वर्ग है।

सूत्र प्रयोग करने पर -

$$M = l_1 + \frac{i}{f}(m - c) = 54.5 + \frac{5}{12}(23.5 - 19)$$

$$= 54.5 + \frac{5 \times 4.5}{12} = 54.5 + \frac{22.5}{12}$$

$$54.5 + 1.875 = 56.875 \qquad \mathbf{M = 56.875}$$

मध्यका के गुण (Merits of Median)

मध्यका के निम्न गुण या लाभ हैं -

(1) मध्यका, बहुलक की भांति अनिश्चित माध्य नहीं है।

(2) यह सामान्य व्यक्ति की समझ में आसानी से आ जाता है।

(3) मध्यका को बिन्दुरेखीय रीति द्वारा भी ज्ञात किया जा सकता है।

(4) मध्यका पर असाधारण और अति सीमान्त (Hetrogenous) पदों का प्रभाव नहीं पड़ता है।

(5) यह माध्य गुणात्मक तथ्यों जैसे – बौद्धिक स्तर स्वास्थ्य, दरिद्रता आदि की माप के लिये सर्वोत्तम माध्य माना जाता है।

(6) मध्यका ज्ञात करते समय यदि कुछ अंशों तक समंक अधूरे रहें तब भी इसे ज्ञात किया जा सकता है।

मध्यका के दोष (Demerits of Median)

मध्यका के दोष या कमियां निम्नलिखित हैं -

(1) मध्यका प्राप्त करने के लिए पदों पर आरोही या अवरोही क्रम में अनुविन्यासित करना पड़ता है।

(2) इसका प्रयोग बीजगणितीय क्रियाओं में नहीं किया जा सकता है।

(3) **प्रथम,** मध्यका का निर्धारण करने के लिए पदों को आरोही या अवरोही क्रम में विन्यसित करना पड़ता है। **दूसरा,** पदों की संख्या 'सम' (even) होने पर मध्यका का 'वास्तविक मूल्य' पता नहीं चल पाता है।

(4) जब श्रेणी के पद-मूल्यों में काफी अन्तर हो या फिर आवृत्तियाँ अनियमित हों, वहां मध्यका केन्द्रीय प्रवृत्ति का सही रूप से प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता है।

(5) इस माध्य को निकालने में श्रेणी के सभी पदों को समान महत्व दिया जाता है जो कि गलत है।